Pauta

Prof. N. Aguilera

Lunes 12 de Abril

CERTAMEN 1 CÁLCULO II (220132)

ALUMNO:_____ **RUT:** _____ **SECCION:** _____

Problema	1 (00 PTOS)	2 (00 PTOS)	3 (00 PTOS)	4 (00 PTOS)	NOTA
Puntaje					

RESULTADOS DE APRENDIZAJES

Aplica la integral de una función de variable real para resolver problemas del ámbito de la Ingeniería.

INSTRUCCIONES

- Escribir sus respuestas con letra clara y legible con lapiz pasta.
- Las respuestas deben venir debidamente justificada.**Identificando claramente los pasos desarrollados.**
- Cada una las hojas de respuestas debe venir con **Nombre, rut** y número de la pregunta.
- Al enviar la resolución de la evaluación, esta debe venir en un archivo pdf, de la siguiente forma: $NombreApellidos - C1.pdf$
- Tiene 100 minutos para responder + 20 minutos para el envio de archivo.
- Entregar al correo del profesor.
- Para cada problema considere k como el quinto dígito de su rut +5.

Ejercicio 1. **10 puntos**

Calcule el diferencial de f dado que:

$$f(x) = \frac{-e^{-kx}}{kx}$$

Ejercicio 2. **20 puntos**

Use el método de cambio de variable y el método de integración por partes para hallar el área en cada caso:

1. $\int kx^2 + \sin(-kx)\, dx$
2. $\int x^2 e^x\, dx$

Ejercicio 3. **30 puntos**

Use el método de fracciones parciales para resolver la integral indefinida. Luego use el método sustitución trigonométrica para resolver la misma integral:

$$\int \frac{2k}{k^2 - x^2} dx$$

Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío - 2021

Ejercicio 1. **10 puntos**

Calcule el diferencial de f dado que:

$$f(x) = \frac{-e^{-kx}}{kx}$$

Primero calculemos

$$f'(x) = \left(\frac{-e^{-kx}}{kx}\right)' = \frac{-1}{k}\left(\frac{e^{-kx}}{x}\right)'$$

$$= \frac{-1}{k}\cdot\left[\frac{(e^{-kx})'\cdot x - (x)'\cdot e^{-kx}}{x^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{k}\left[\frac{-ke^{-kx}\cdot x - e^{-kx}}{x^2}\right]$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^{-kx}(kx+1)}{kx^2}$$ } 6 pts.

Así, $df = \frac{e^{-kx}(kx+1)}{kx^2}\,dx$. } 3 pts.

Reemplazar k de forma correcta } 1 pto.

Ejercicio 2. **20 puntos**

Use el método de cambio de variable y el método de integración por partes para hallar el área en cada caso:

1. $\int kx^2 + \sin(-kx)\,dx$
2. $\int x^2 e^x\,dx$

① $\int kx^2 + \sin(-kx)\,dx = k\int x^2\,dx - \frac{1}{k}\int \sin(u)\,du$

Sea $u = -kx$

$du = -k\,dx$

$-\frac{1}{k}\,du = dx$

$= \frac{k}{3}x^3 + \frac{1}{k}\cos(-kx) + C_1$

$\therefore \int kx^2 + \sin(-kx)\,dx = \frac{k}{3}x^3 + \frac{1}{k}\cos(-kx) + C_{11}$

(10 pts.)

2) $\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$

Sea $u = x^2$ $\quad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx$ $\quad v = e^x$

$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

Sea $u = x$ $\quad dv = e^x dx$

$du = dx$ $\quad v = e^x$

$\therefore \int x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C_{11}$

10 pts

Ejercicio 3. **30 puntos**

Use el método de fracciones parciales para resolver la integral indefinida. Luego use el método sustitución trigonométrica para resolver la misma integral:

$$\int \frac{2k}{k^2 - x^2} dx$$

Usando fracciones parciales.

$$\int \frac{2k}{k^2 - x^2} dx = 2k \int \frac{1}{(k-x)(k+x)} dx$$

$$= 2k \int \frac{\frac{1}{2k}}{k-x} + \frac{\frac{1}{2k}}{k+x} dx$$

Separando fracciones

$$1 = A(k+x) + B(k-x)$$

Con $x = -k$; $B = \frac{1}{2k}$

Con $x = k$; $A = \frac{1}{2k}$

$$= \int \frac{1}{k-x} dx + \int \frac{1}{k+x} dx$$

$$= -\ln(k-x) + \ln(k+x) + C.$$

Sea $u = k - x$

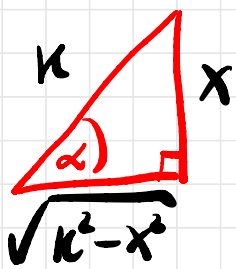
$-du = dx$

$$\therefore \int \frac{2k}{(k-x)(k+x)} dx = \ln\left(\frac{k+x}{k-x}\right) + C \quad //$$

15 pts.

Usando Sustitución Trigonométrica.

$$\int \frac{2\kappa}{\kappa^2 - x^2}\,dx = 2\kappa \int \frac{1}{\kappa^2 - x^2}\,dx$$



$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\kappa}$$

de donde

$$\kappa \cos(\alpha)\,d\alpha = dx$$

y $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{\kappa^2 - x^2}}{\kappa}$ / $(\cdot)^2$

$\cos^2(\alpha) = \frac{\kappa^2 - x^2}{\kappa^2}$ / $(\cdot)^{-1}$

$\sec^2(\alpha) = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - x^2}$

$$\frac{1}{\kappa^2}\sec^2(\alpha) = \frac{1}{\kappa^2 - x^2}$$

$$= 2\kappa \int \frac{1}{\kappa^2}\sec^2(\alpha)\cdot \kappa \cos(\alpha)\,d\alpha$$

$$= 2\int \sec(\alpha)\,d\alpha$$

$$= 2\ln\left(\sec(\alpha) + \tan(\alpha)\right) + C'$$

$$= 2\ln\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{\kappa^2 - x^2}}\right) + C.$$

$$\therefore \int \frac{2\kappa}{\kappa^2 - x^2}\,dx = 2\ln\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{\kappa^2 - x^2}}\right) + C.$$

15 pts